**УДК 681.11-1/-9**

**Параметрическое исследование и визуализация анкерной погрешности механических часов: от математической модели к интерактивному калькулятору**

Королева Алина Александровна

*Магистр 1 год*
*кафедра «Метрология и взаимозаменяемость»*
*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*

*Научный руководитель: А.С. Комшин,*
*доктор технических наук, заведующий кафедрой «Метрология и взаимозаменяемость»*

Механические часы представляют собой сложную систему, в которой осциллятор (баланс с волоском) взаимодействует со спусковым механизмом (анкером). Анкер периодически подталкивает баланс, компенсируя потери на трение, но одновременно вносит возмущения, приводящие к изменению частоты – так называемой анкерной погрешности. Математическое описание этого процесса сводится к нелинейному дифференциальному уравнению с малым параметром. Цель работы – получить аналитические формулы для анкерной погрешности и выявить, какие геометрические параметры спуска влияют на неё наиболее сильно.

Математическое описание работы часового механизма начинается с уравнения вращательного движения баланса, которое учитывает момент инерции, демпфирование, упругость волоска и внешний момент, создаваемый анкером:

$$J\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + k\phi = M(\phi)$$

где J – момент инерции баланса, c – коэффициент демпфирования, k – жёсткость волоска, M(ϕ) – момент от анкерного механизма. Вводя собственную частоту у $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ и малый параметр $\xi = c/(2J\omega_0)$, а также полагая $M(\phi)/J = \xi\mu_1(\phi)$, получаем уравнение в форме, удобной для асимптотического анализа:

$$\ddot{\phi} + 2\xi\omega_0\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \xi\mu_1(\phi), \tag{1}$$

Поскольку параметр $\xi$ очень мал, колебания баланса близки к гармоническим, но их амплитуда и фаза медленно меняются во времени. Для разделения быстрых и медленных процессов применяется метод двух временных масштабов: вводятся быстрое время $t_1 = t$ и медленное время $t_2 = \xi t$. Решение представляется в виде ряда $\phi = \phi_0 + \xi\phi_1 + \cdots$, и после подстановки в (1) и устранения секулярных членов получаются уравнения, описывающие эволюцию амплитуды Φ и фазы $\gamma$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\xi\omega_0\Phi + \frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\mu(\Phi,\psi)\cos\,\psi\,d\psi, \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_0\Phi}\int_0^{2\pi}\mu(\Phi,\psi)\sin\,\psi\,d\psi,$$

где $\psi = \omega_0 t + \gamma$, а $\mu(\phi) = M(\phi)/J$. Производная фазы $\dot{\gamma}$ представляет собой анкерную погрешность $R$, то есть отклонение частоты хода от собственной частоты осциллятора.

Параллельно с методом двух масштабов был применён классический метод усреднения Крылова–Боголюбова. Приведение исходного уравнения к стандартной форме с последующим усреднением по периоду даёт в точности те же уравнения для медленной эволюции амплитуды и фазы, что и двухмасштабное разложение. Совпадение результатов двух независимых асимптотических подходов подтверждает корректность выведенных соотношений.

Вид функции $\mu(\phi)$ определяется конструкцией спускового механизма. Для двух наиболее распространённых типов – детант-спуска (с отделённым импульсом) и спуска с отбоем – интегралы в приведённых уравнениях вычисляются аналитически, что даёт компактные формулы, связывающие погрешность с геометрическими параметрами.

Для детант-спуска импульс передаётся на узком угловом интервале $[\phi_0 - a,\ \phi_0 + a]$, где $\phi_0$ – центр интервала, $a$ – полуширина. Соответствующая формула имеет вид:

$$R = -\frac{\omega_0}{4Q}\ \frac{\sqrt{\Phi_0^2 - (\phi_0 + a)^2} - \sqrt{\Phi_0^2 - (\phi_0 - a)^2}}{a}, \qquad (2)$$

Для спуска с отбоем ключевым параметром является угол зацепления $\phi_M$, и погрешность выражается проще:

$$R = \frac{\omega_0}{2Q}\ \frac{\sqrt{\Phi_0^2 - \phi_M^2}}{\phi_M}, \qquad (3)$$

где $\omega_0$ – собственная частота, $Q$ – добротность осциллятора, $\Phi_0$ – установившаяся амплитуда колебаний. Знак «минус» в (2) означает, что детант-спуск приводит к замедлению хода, знак «плюс» в (3) – к ускорению.

Чтобы выяснить, какой из конструктивных параметров влияет на точность наиболее сильно, выполнено параметрическое исследование по формулам (2) и (3). В качестве базовых приняты значения, близкие к использованным в моделировании [1]: $\omega_0 = 25{,}1327$ рад/с, $Q = 200$, $\Phi_0 = 2{,}5$ рад, $\phi_0 = 0{,}5$ рад, $a = 0{,}2$ рад. Каждый из параметров варьировался в разумных пределах, остальные фиксировались. Полученные зависимости представлены в таблицах.

Таблица 1 – Зависимость анкерной погрешности $R$ от параметров $\Phi_0$, $\phi_0$, $a$ и $Q$ для детант-спуска

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Φ₀ | 1,9 | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3 | 3,1 |
| R | 0,01725 | 0,01632 | 0,01548 | 0,01473 | 0,01405 | 0,01343 | **0,01287** | 0,01235 | 0,01188 | 0,01143 | 0,01103 | 0,01065 | 0,01029 |
| ϕ0 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 | 0,55 | 0,6 | 0,65 | 0,7 | 0,75 | 0,8 |
| R | 0,00506 | 0,00634 | 0,00762 | 0,00891 | 0,01022 | 0,01154 | **0,01287** | 0,01422 | 0,01559 | 0,01698 | 0,01840 | 0,01984 | 0,02131 |
| a | 0,08 | 0,1 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,2 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 | 0,3 | 0,32 |
| R | 0,01283 | 0,01284 | 0,01284 | 0,01285 | 0,01285 | 0,01286 | **0,01287** | 0,01288 | 0,01289 | 0,01290 | 0,01291 | 0,01293 | 0,01294 |
| Q | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 |
| R | 0,01839 | 0,01716 | 0,01609 | 0,01514 | 0,01430 | 0,01355 | **0,01287** | 0,01226 | 0,01170 | 0,01119 | 0,01073 | 0,01030 | 0,00990 |

Таблица 2 – Зависимость анкерной погрешности $R$ от параметров $\Phi_0$, $\phi_M$ и $Q$ для спуска с отбоем

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi_0$ | 1,9 | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3 | 3,1 |
| R | 0,23034 | 0,24335 | 0,25630 | 0,26922 | 0,28211 | 0,29497 | **0,30781** | 0,32063 | 0,33342 | 0,34620 | 0,35897 | 0,37172 | 0,38446 |
| $\phi_M$ | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 | 0,55 | 0,6 | 0,65 | 0,7 | 0,75 | 0,8 |
| R | 0,78288 | 0,62517 | 0,51981 | 0,44438 | 0,38764 | 0,34336 | **0,30781** | 0,27860 | 0,25415 | 0,23335 | 0,21542 | 0,19979 | 0,18602 |
| Q | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 |
| R | 0,43973 | 0,41041 | 0,38476 | 0,36213 | 0,34201 | 0,32401 | **0,30781** | 0,29315 | 0,27983 | 0,26766 | 0,25651 | 0,24625 | 0,23678 |

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы.

С ростом амплитуды $\Phi_0$ погрешность $R$ монотонно убывает примерно обратно пропорционально. Зависимость от добротности $Q$ также обратно пропорциональна, что соответствует множителю $1/Q$ в формуле (2). Параметр $a$ (полуширина импульса) в исследованном диапазоне изменяет $R$ незначительно благодаря взаимной компенсации числителя и знаменателя.

Наиболее критичным параметром оказался центр интервала импульса $\phi_0$: даже смещение на 0,1 рад (около 5,7°) приводит к изменению $R$ примерно на 30 %. Это означает, что при конструировании часовых механизмов точность положения центра импульса должна контролироваться особенно строго.

Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с численным моделированием, выполненным в работе [1]. Для детант-спуска относительное расхождение между аналитической формулой (2) и событийно-управляемым моделированием в SolidWorks составило 0,077 %, для спуска с отбоем – 0,11 %. Это подтверждает применимость метода двух масштабов для описания нелинейной динамики часовых механизмов.

Проведённое параметрическое исследование позволяет количественно оценить вклад каждого конструктивного параметра в анкерную погрешность. Наиболее существенное влияние оказывает $\phi_0$, поэтому именно на этот параметр следует обращать первоочередное внимание при проектировании и настройке спускового механизма.

**Литература**

1. POPKONSTANTINOVIC B. et al. THE NONLINEAR DYNAMICS OF ESCAPEMENT MECHANISMS //ACTA TECHNICA NAPOCENSIS-Series: APPLIED MATHEMATICS, MECHANICS, and ENGINEERING. – 2025. – Т. 68. – №. 1 & 2.
2. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику //Киев: изд-во АН УССР. – 1937. – Т. 366.*