УДК 62.529

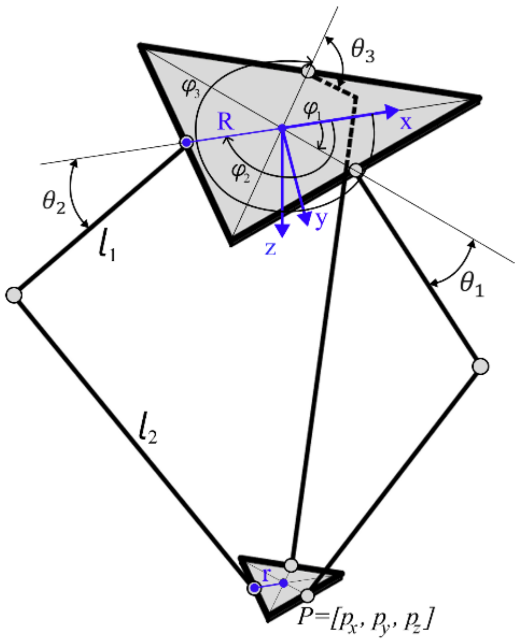
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ДЕЛЬТА РОБОТА

Плотицин Михаил Павлович [(1)], Ханоян Вова Давидович [(2)]

Студент 3 курса [(1), (2)],
кафедра «Металлорежущие станки»
Московский государственный технический университет

Научный руководитель: С.К. Руднев,
старший преподаватель кафедры «Металлорежущие станки»

Роботы-манипуляторы параллельной кинематики, предназначенные для высокоскоростной сортировки, где огромное значение имеют статическая и динамическая балансировки робота. Для этого было предложено решение динамической задачи для дельта-робота на основе метода Эйлера-Лагранжа и использование последующего численного моделирования для получения значений сил, действующих в системе.



φ: угол поворота системы координат

θ_i: угол между плечом и основанием

l_1: длина плеча

l_2: длина рычага

m_1: масса плеча

m_2: масса рычага

m_2: масса подвижной платформы

R, r: радиусы вписанных окружностей

$P = [p_x, p_y, p_z]$: координаты подвижной платформы

Рис.1 Упрощённая версия математической модели дельта робота

Для описания уравнения Лагранжа используем три линейные координаты p_x, p_y, p_z, положения центра движущейся платформы относительно системы координат $Oxyz$. Вместе с тремя угловыми координатами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ трех соответствующих приводных звеньев, образуется обобщенный вектор координат $q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, p_x, p_y, p_z]$, который полностью описывает движение дельта-робота.

Находим выражения для кинетической и потенциальной энергии механизма:

$$K = \frac{1}{2} m_3 (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2) + \sum_i^3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2\right) \dot{\theta}_i^2$$

и

$$P = \frac{1}{2} m_3 g p_z + \sum_i^3 (\frac{1}{2} m_1 g l_1 sin\theta_i + (\frac{1}{2} m_1 g l_1 sin\theta_i + \frac{1}{2} m_3 g p_z)).$$

Звенья в замкнутой кинематической цепи объединены голономными связями $N_c(q)$. Для шестирычажного механизма

$N_{ci}(q) = (p_X + rcos\varphi_i - Rcos\varphi_i - l_1 cos\varphi_i cos\theta_i)^2 + (p_y + rsin\varphi_i - Rsin\varphi_i - l_1 sin\varphi_i cos\theta_i)^2 + (p_z - l_1 sin\theta_i)^2 - l_2^2 = 0$, для i = 1,2,3

Изначально уравнение движения механизма может быть описано в координатах $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, p_x, p_y, p_z\} \in \mathrm{R}^6$. С учетом наличия трёх независимых голономных связей $N_c(q) \in \mathrm{R}^3$, такое описание является избыточным. Данные связи вызывают силы связей $F_c \in \mathrm{R}^3$, так называемые множители Лагранжа. При этом вектор моментов сил приводов, которые должны быть приложены к активным соединениям в плечах, будет обозначаться как $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$.

В этом случае правая часть уравнения Эйлера-Лагранжа, описывающего динамику системы, должно содержать соответствующий член:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(K-P)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial(K-P)}{\partial q_k} = \tau + J_c^T F_c,$$

где J_c – Якобиан сил связей.

Для решения необходимо вычислить силы связей и привести уравнение к трём обобщенным координатам $\{p_x, p_y, p_z\}$. Сначала получим выражения первой и второй производной уравнений голономных связей:

$$\frac{d}{dt}N_c(q) = J_c(q)\dot{q} = J_{c,1}(q)\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix} + J_{c,2}(q)\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\end{bmatrix} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}N_c(q) = \begin{bmatrix}\dot{J}_{c,1}(q,\dot{q}) & \dot{J}_{c,2}(q,\dot{q})\end{bmatrix}\dot{q} + \begin{bmatrix}J_{c,1}(q) & J_{c,2}(q)\end{bmatrix}\ddot{q} = 0,$$

где $J_{c,1}$ и $J_{c,2}$ – Якобианы по соответстующим наборам координат.

Выражаем два набора координат: обобщенные (свободные) $q_p = \left[p_x, p_y, p_z\right]^T$ и связанны $q_t = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$.

Соответственно, уравнение движения можно преобразовать в вид

$$\begin{bmatrix}M_1(q)\\M_2(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_p\\\ddot{q}_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{C}_1(q,\dot{q})\\\mathrm{C}_2(q,\dot{q})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_p\\\dot{q}_t\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}J_{c,1}^T F_c\\J_{c,2}^T F_c\end{bmatrix}$$

Тогда силы связей вычисляются как

$$F_c = \begin{bmatrix}F_{cx}\\F_{cy}\\F_{cz}\end{bmatrix} = \left[J_{c,2}^T\right]^{-1}[M_2(q)\begin{bmatrix}\ddot{q}_p\\\ddot{q}_t\end{bmatrix} + \mathrm{C}_2(q,\dot{q})\begin{bmatrix}\dot{q}_p\\\dot{q}_t\end{bmatrix} + g_2]$$

Подставив полученные выше выражения кинетической, потенциальной энергии и производных от уравнений связей, получим

$$F_{ci} = \begin{bmatrix} F_{cxi} \\ F_{cyi} \\ F_{czi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_X + rcos\varphi_i - Rcos\varphi_i - l_1 cos\varphi_i cos\theta_i \\ (p_y + rsin\varphi_i - Rsin\varphi_i - l_1 sin\varphi_i cos\theta_i \\ p_z - l_1 sin\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_3 + 3m_2)\ddot{p}_x/2 \\ (m_3 + 3m_2)\ddot{p}_y/2 \\ (m_3 + 3m_2)(\ddot{p}_z - g)/2 \end{bmatrix},$$

$$\text{для } i \ = 1,2,3$$

Чтобы выразить динамику через три обобщённые координаты, выражаем связанные координаты и их производные через обобщенные:

$$q_t = f(q_p),$$

$$\dot{q}_t = -J_{c,2}^{-1}(q) J_{c,1}(q)\dot{q}_p,$$
$$\ddot{q}_t = -J_{c,2}^{-1}(q)[\dot{J}_{c,1}(q, \dot{q_p})\dot{q}_p + J_{c,1}(q)\ddot{q}_p + \dot{J}_{c,2}(q, \dot{q_p})\dot{q}_t]$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение движения, после группировки слагаемых получаем уравнение динамики механизма:

$$M_p(q) \begin{bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{p}_z \end{bmatrix} + C_p(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} + g_p = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

После решения данного уравнения, получим конечные значения моментов сил привода

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1 \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) g l_1 cos\theta_1$$
$$- 2l_1 F_{c1}\left[\left(p_x cos\varphi_1 + p_y sin\varphi_1 + r - R\right) sin\theta_1 - p_z cos\theta_1\right],$$
$$\tau_2 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1 \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) g l_1 cos\theta_2$$
$$- 2l_1 F_{c2}\left[\left(p_x cos\varphi_2 + p_y sin\varphi_2 + r - R\right) sin\theta_2 - p_z cos\theta_2\right],$$
$$\tau_1 = \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right) l_1 \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) g l_1 cos\theta_3$$
$$- 2l_1 F_{c3}\left[\left(p_x cos\varphi_3 + p_y sin\varphi_3 + r - R\right) sin\theta_3 - p_z cos\theta_3\right].$$

Следующим шагом будет написание программы численного моделирования для получения значений моментов сил на двигателях.

Литература

1. *С.А. Колюбин* Динамика робототехнических систем*:* учебное пособие. Санкт-Петербург *2017г. – 119 стр.*
2. В.Г. Хомченко *Робототехнические системы: учебное пособие. Омск 2016г. – 195 стр.*
3. Fu-Shin Lee, Chen-I Lin. *Controller Design for a Delta Robot Using* Lagrangian Multipliers. 2021, DOI: https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-898296/v1
4. Tae-Hyoung Kim, Yeongjae Kim, Taeheon Kwak, Masaaki Kanno. Metaheuristic Identification for an Analytic Dynamic Model of a Delta Robot with Experimental Verification. *Actuators* 2022, *11*(12), 352; DOI: https://doi.org/10.3390/act11120352