

УДК 621.9-18

АВТОМАТИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ СИЛОВЫХ СМЕЩЕНИЙ УПРУГО-ФРИКЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Андрей Геннадьевич Ширшов

Аспирант 1 года,

кафедра «Металлорежущие станки»,

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Научный руководитель: П.М. Чернянский,

доктор технических наук, профессор кафедры «Металлорежущие станки»,

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Задача автоматизации исследований силовых смещений является частью задачи разработки программы для автоматизации расчёта и анализа силовых смещений станков на стадии их проектирования. Данная работа ведётся на базе теории силовых смещений Чернянского П.М. [1]. Согласно этой теории, конструкция сводится к упруго-фрикционной системе (УФС), которая отражает физические свойства изучаемой конструкции. Особенность использования в расчётах смещений УФС состоит в том, что все процессы, все факторы, влияющие на величину силовых смещений вершины инструмента и, следовательно, на силовую составляющую точности станка, представлены в виде системы. В итоге можно сказать, где слабое звено, на что следует конструктору обратить внимание при проектировании станка, когда величина силовых смещений превышает заданные пределы.

Основной работой в процессе автоматизации расчётов является разработка такой математической модели расчёта силовых смещений, чтобы с одной стороны был сохранён системный подход к конструкции, факторам и процессам, и, с другой стороны, полученные алгоритмы решения легко поддавались автоматизации расчёта на компьютере.

Ранее была проведена автоматизация расчёта характеристики силовых смещений (ХСС) для одного модуля упруго-фрикционной системы (УФС). В результате была создана программа Динара для расчёта силовых смещений в УФС. Фактически это была не полноценная программа, а набор авторских модулей, разработанных средствами программы MBTU 3.7 («Моделирование В Технических Устройствах», создана на кафедре Э7 «Ядерные реакторы и установки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, представляет собой бесплатный аналог Simulink). Расчёт смещений проводился программой MBTU 3.7., при этом пользователь задавал структуру УФС, расставляя в окне программы блоки - модули УФС.

Позднее анализ работы программы Динара показал, что, хотя смещения одного модуля УФС программа считала правильно, смещения всей системы считались неверно. Кроме того, оказалось, что программы типа MBTU и Simulink не подходят для расчёта смещений в УФС: необходим совершенно другой подход.

Поиск нового метода для расчёта смещений системы модулей привёл к методу конечных элементов (МКЭ). Согласно работе [2], модули УФС являются уже готовыми конечными элементами (КЭ). И МКЭ здесь оказывается методом математически точным, потому что отсутствует алгоритм разбиения среды на конечные элементы, который и вносит погрешность в расчёты (этот алгоритм носит название «Триангуляция

Делоне»). Кроме того оказалось, что МКЭ позволяет решать задачи не только численно, но и аналитически, что окончательно определило выбор этого метода.

Рассмотрим фрагмент одномерной пружинной системы (рис. 1). Перемещения всех узлов допускаются только вдоль оси Oy . Выделим одну пружину, имеющую узлы 1 и 2 (см. рис. 2). Для этого отбросим все остальные пружины, а их действие заменим неизвестными реакциями в узлах 1 и 2. Положительные направления перемещений y_1 , y_2 узлов и реакций F_1 и F_2 примем совпадающими с направлением оси Oy .

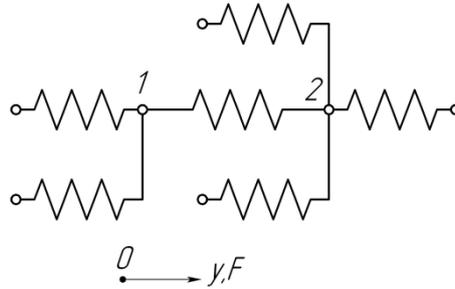


Рис. 1. Фрагмент одномерной пружинной системы

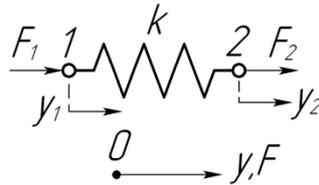


Рис. 2. Конечный элемент (пружина)

Из уравнения равновесия следует:

$$F_1 + F_2 = 0 \quad 1$$

Согласно закону Гука (работа [3]), между силой упругости $F_{\text{упр}}$ и абсолютным удлинением пружины Δ имеет место следующая зависимость:

$$F_{\text{упр}} = k \cdot \Delta \quad 2$$

где $F_{\text{упр}}$ — сила упругости пружины, Н,
 k — жёсткость элемента, Н/мкм,
 Δ — абсолютное удлинение пружины, мкм.
 Абсолютное удлинение пружины равно:

$$\Delta = y_1 - y_2 \quad 3$$

где y_1 и y_2 — смещения узлов 1 и 2 пружины соответственно, мкм.

Приравнявая $F_1 = F_{\text{упр}}$, получаем:

$$F_1 = k \cdot (y_2 - y_1), \quad 4$$

С учётом уравнения 1 для F_2 получаем:

$$F_2 = -F_1 = k \cdot (y_1 - y_2), \quad 5$$

В матричном виде уравнения 4 и 5 записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad 6$$

Матрицу

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 7$$

называют матрицей жёсткости элемента (пружины) или сокращённо МЖЭ.
 Вектор-столбец

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad 8$$

называют вектором-столбцом узловых сил, а вектор-столбец

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad 9$$

называют вектором-столбцом узловых перемещений. В сокращённом виде уравнение 6 запишется следующим образом:

$$F = K \cdot Y \quad 10$$

Важно подчеркнуть, что уравнение 6 или 10 позволяет, не зная конкретных значений векторов Y и F , установить связь между узловыми перемещениями Y и узловыми реакциями F , т.е. характеризует свойства конечного элемента. Это позволяет, определив значения узловых реакций F , находить узловые смещения Y .

Рассмотрим пружинную систему, показанную на рис. 3. Система имеет три степени свободы: перемещения y_1 , y_2 , y_3 . Составим алгебраические уравнения, позволяющие определить эти перемещения. Будем использовать способ, основанный на записи уравнения равновесия узлов пружин. Возьмём первую пружину жёсткости k_1 . К ней подходят две пружины жёсткостью k_2 и k_4 . Отбросим эти пружины, заменив их действительными реакциями. Аналогично необходимо будет сделать для остальных узлов системы пружин. Запишем выражения для реакций в узлах. При этом будем придерживаться следующего правила: верхний индекс будет означать принадлежность конкретной пружине, а нижний индекс будет означать принадлежность узлу пружины (первому или второму). Полученные уравнения будут иметь следующий вид:

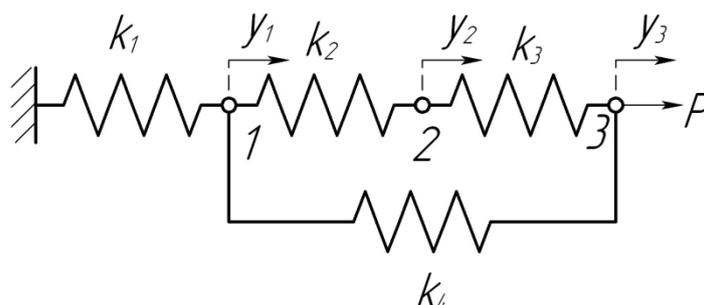


Рис. 3. Пружинная система

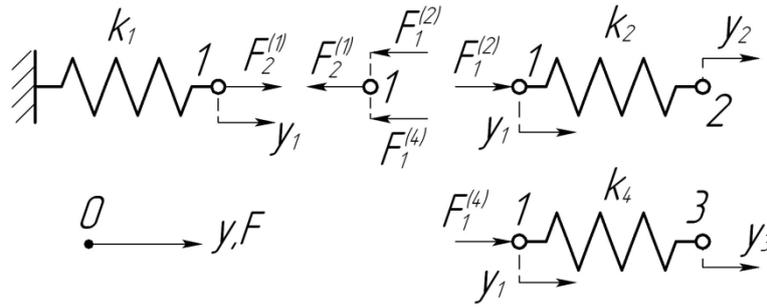


Рис. 4. Реакции в системе (первый узел)

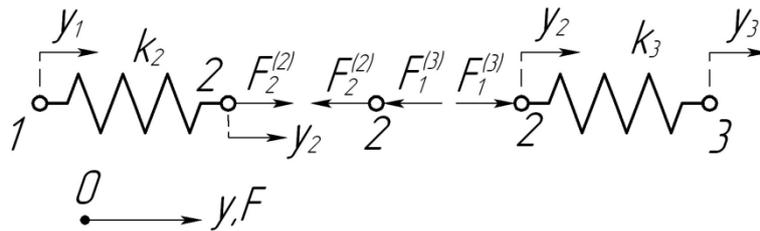


Рис. 5. Реакции в системе (второй узел)

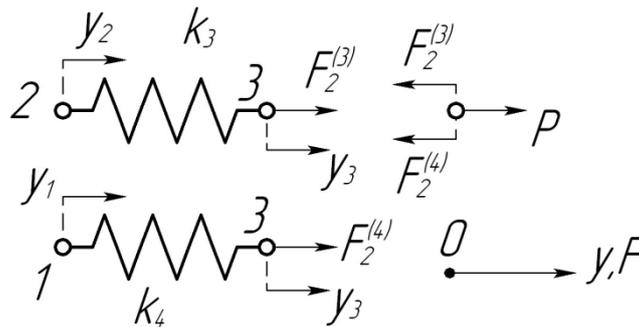


Рис. 6. Реакции в системе (третий узел)

Для пружины № 1

$$y_1^{(1)} = 0; \quad y_2^{(1)} = y_1; \quad k^{(1)} = k_1; \quad F_2^{(1)} = k_1 \cdot y_1$$

Для пружины № 2

$$y_1^{(2)} = 0; \quad y_2^{(2)} = y_2; \quad k^{(2)} = k_2; \quad F_1^{(2)} = k_2 \cdot (y_1 - y_2)$$

Для пружины № 3

$$y_1^{(3)} = 0; \quad y_2^{(3)} = y_3; \quad k^{(3)} = k_3; \quad F_1^{(3)} = k_3 \cdot (y_2 - y_3)$$

Для пружины № 4

$$y_1^{(4)} = 0; \quad y_2^{(4)} = y_3; \quad k^{(4)} = k_4; \quad F_1^{(4)} = k_4 \cdot (y_1 - y_3)$$

11

Воспользовавшись уравнением реакций 11, запишем уравнение равновесия первого узла (см. рис. 4) через перемещения:

$$(k_1 + k_2 + k_4)y_1 - k_2y_2 - k_4y_3 = 0 \quad 12$$

Аналогичным образом составляются уравнения равновесия для второго и третьего узла (также см. рис. 5 и 6). С учётом того, что:

$$\begin{aligned} F_2^{(2)} &= k_2 \cdot (-y_1 + y_2); \\ F_2^{(3)} &= k_3 \cdot (y_2 + y_3); \\ F_2^{(3)} &= k_3 \cdot (-y_2 + y_3); \\ F_2^{(4)} &= k_4 \cdot (-y_1 + y_3), \end{aligned} \quad 13$$

получим уравнения равновесия для остальных узлов. В итоге будет следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 + k_4)y_1 - k_2y_2 - k_4y_3 &= 0 \\ -k_2y_1 + (k_2 + k_3)y_2 - k_3y_3 &= 0 \\ -k_4y_1 - k_3y_2 + (k_3 + k_4)y_3 &= P \end{aligned} \right\} \quad 14$$

В матричном виде систему уравнений 14 удобнее всего представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_4) & -k_2 & -k_4 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ -k_4 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad 15$$

Или сокращённо:

$$K \cdot Y = F \quad 16$$

где K — матрица жёсткости конструкции (МЖК),
 Y — вектор узловых смещений,
 F — вектор узловых сил.

Система алгебраических уравнений 15 называют разрешающей системой уравнений МКЭ. Решением системы 15 определяются неизвестные смещения y_1, y_2, y_3 .

Рассмотренная выше методика построения уравнения МКЭ для системы пружин довольно громоздка. На практике специалист по МКЭ формирует систему уравнений сразу, используя в качестве исходной информации только схему пружинной системы. При этом вся работа по формированию матричного уравнения состоит из пяти последовательных шагов, описанных ниже.

Перед тем, как описывать эти шаги, необходимо отметить, что элементы матрицы и вектора будут называться ячейками этой матрицы (этого вектора), как это принято при программировании. В дальнейшем это позволит избежать путаницы между элементами матрицы и элементами системы пружин и УФС — упруго-фрикционной системы.

Шаг 1. Нумерация узлов конечных элементов.

Все узлы системы пружин нумеруются по порядку цифрами 1, 2, 3 и т.д. Те узлы, которые не имеют возможности перемещаться, получают номер ноль.

Шаг 2. Генерация МЖЭ для всех элементов системы.

Для каждого элемента (пружины) формируется МЖЭ по следующей зависимости:

$$\text{МЖЭ: } k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix}, \quad 17$$

где k_i — жёсткость КЭ (задаётся пользователем или определяется автоматически).

К полученным МЖЭ добавляются сверху и слева соответственно строка и столбец с номерами узлов. Номера узлов записываются в порядке их последовательного увеличения слева направо в строке и сверху вниз в столбце. Пусть для примера левый узел первого элемента жёсткости k_1 имеет номер 0, а правый узел этого элемента имеет номер 1. Тогда матрица жёсткости этого элемента будет выглядеть следующим образом (см. рис. 7).

	0	1
0	k_1	$-k_1$
1	$-k_1$	k_1

Рис. 7. Матрица жёсткости элемента 1 (рис. 3)

Добавочные столбцы и строки определяют новые индексы ячеек МЖЭ и используются в дальнейшем для передачи значений из ячеек МЖЭ в МЖК.

Шаг 3. Генерация пустой МЖК.

Формируется нулевая матрица размером $N \times N$, где N — количество узлов системы, имеющих возможность перемещения (их номер отличен от нуля). К этой матрице также добавляются строка и столбец с номерами узлов. Узлы перечисляются по порядку от 1 до N . Для системы, имеющей три подвижных узла, данная матрица будет иметь следующий вид (см. рис. 8). Добавочные столбцы и строки определяют новые индексы ячеек МЖК и используются в дальнейшем для приёма значений из ячеек МЖЭ.

	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

Рис. 8. Матрица жёсткости конструкции

Шаг 4. Заполнение МЖК.

При заполнении МЖК программа последовательно перебирает ячейки МЖЭ всех элементов системы пружин. Значения в этих ячейках пересылается в ячейки МЖК. При этом:

- 1) значение в ячейке МЖК суммируется со значением из ячейки МЖЭ,
- 2) адрес ячейки МЖК совпадает с адресом ячейки МЖЭ.

Если в адресе ячейки МЖЭ хотя бы одно из чисел является нулём, то значение этой ячейки не попадает в МЖК, потому что в МЖК нет ячеек с нулевым адресом.

Шаг 5. Формирование остальных векторов матричного уравнения системы.

Для получения матричного уравнения системы нам остаётся сформировать ещё два вектора: узловых смещений и сил, приложенных к узлам системы. Первый вектор

содержит смещения в узлах системы. Второй вектор содержит значения внешних сил, приложенных к узлам системы. Номера ячеек этих векторов соответствуют номерам узлов системы. Вектор узловых смещений будет иметь вид $[u_1, u_2, u_3]^T$, вектор узловых сил будет иметь вид $[0, 0, 0, P]^T$. Сравнивая матричные уравнения, полученные программным путём и вручную, отметим, что они полностью совпадают.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 9. К телу жёсткости k , которое лежит на краю некоторого недеформируемого основания, прикладывается внешняя сила F . При смещении края тела появляется сила трения $F_{тр}$. Силовые смещения края рассматриваемого тела в работе [1] моделируется с помощью модуля УФС с независимыми элементами упругости и трения. Посмотрим, как можно смоделировать эти смещения, используя МКЭ.

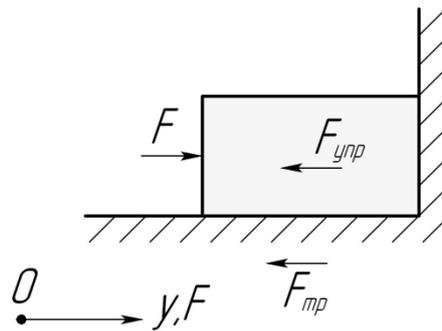


Рис. 9. Схема для расчёта силовых смещений

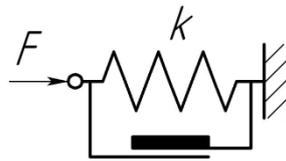


Рис. 10 - Схема для расчёта силовых смещений с использованием модулей УФС.

При использовании МКЭ упругие свойства тела моделируются использованием пружины жёсткости k . Правый конец этой пружины соединяется с заделкой, т.к. правый край тела смещений не имеет, а к левому краю пружины прикладываются силы, которые определяют смещение пружины — силы F и $F_{тр}$ (см. рис. 11). При этом величина силы трения $F_{тр}$ определяется в зависимости от внешней силы и смещения пружины по следующей зависимости:

$$F_{тр} = \begin{cases} T, & uk - T \\ -T, & uk + T \\ F - uk, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad 18$$

где T — максимальная величина силы трения, Н,
 u — текущее значения смещения тела, мкм.

В начальный момент времени величина u всегда равна нулю (начальное условие при моделировании).

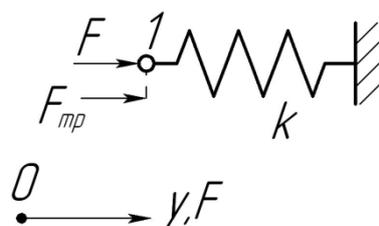


Рис. 11. Схема для расчёта силовых смещений с использованием МКЭ

Таким образом, у нас получилась простейшая система, состоящая из одного элемента, смещения в которой несложно программно рассчитать по алгоритму, описанному в главе . В этой системе всего один узел с номером 1. Сформируем МЖЭ. Она имеет всего одну ячейку со значением k:

$$\text{МЖЭ: } [k] \quad 19$$

Вектор узловых смещений состоит из одной ячейки со смещением y , а вектор узловых сил состоит из одной ячейки с силой $F - F_{\text{тр}}$. В итоге получаем следующее матричное уравнение:

$$[k][y] = [F - F_{\text{тр}}] \quad 20$$

Уравнение 20 легко приводится к скалярному уравнению, описывающему смещения модуля УФС с независимыми элементами упругости и трения в работе [1]:

$$y = \frac{F - F_{\text{тр}}}{k} \quad 21$$

Т.к. уравнения, описывающие силовые смещения, совпадают, использование МКЭ в том виде, как это описано в этом разделе выше, даст ту же ХСС (характеристику силовых смещений), что и использование модуля УФС с независимыми элементами упругости и трения.

Таким образом, данный модуль УФС можно заменить схемой на рисунке и рассчитывать смещения программно.

Рассмотрим УФС, состоящей из двух последовательно соединённых модулей с независимыми элементами упругости и трения (см. рис. 12).

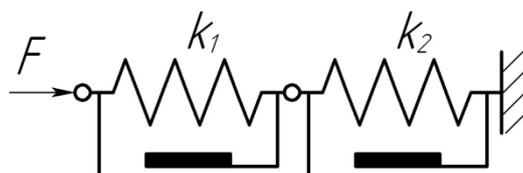


Рис. 12. Схема двух последовательно соединённых модулей УФС

Для расчёта силовых смещений последовательного соединения элементов в работе [1] имеем следующую зависимость:

$$y = \frac{F - F_{\text{тр}1}}{k_1} + \frac{F - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2}}{k_2} \quad 22$$

Посмотрим, как можно получить ту же зависимость, используя МКЭ. Для этого заменяем модули с независимыми ЭУ и ЭТ (элементом упругости и элементом трения) на их эквиваленты для МКЭ. В итоге получим систему, показанную на рис. 13.

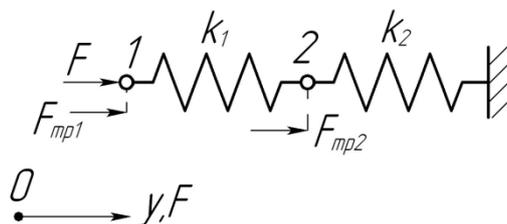


Рис. 13. Аналог схемы на рисунке 12 для расчёта с использованием МКЭ

В системе на рис. 13 имеется 2 узла, которых обозначим 1 и 2. Сформируем МЖЭ. Для левой пружины получим МЖЭ, представленную на рис. 14, для правой пружины — на рис. 15.

	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1

Рис. 14. МЖЭ для левой пружины

	2	0
2	k_2	$-k_2$
0	$-k_2$	k_2

Рис. 15. МЖЭ для правой пружины

МЖК для данной системы представлена на рис. 16.

	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1+k_2

Рис. 16. Матрица жёсткости конструкции

Вектор узловых смещений имеет вид $[y_1; y_2]^T$, вектор узловых сил имеет вид $[F-F_{тр1}; -F_{тр2}]^T$ (каждая ячейка имеет только те силы, которые приложены к узлу соответствующего номера). В итоге получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+F_{тр1} \\ F_{тр2} \end{bmatrix} \quad 23$$

Переходя от матричного уравнения к СЛАУ (системе линейных алгебраических уравнений), получаем:

$$\left. \begin{aligned} k_1 y_1 - k_1 y_2 &= F + F_{тр1} \\ -k_1 y_1 + (k_1 + k_2) y_2 &= F_{тр2} \end{aligned} \right\} \quad 24$$

Решая СЛАУ (уравнение 24), получим:

$$y_2 = \frac{F + F_{\text{тр1}} + F_{\text{тр2}}}{k_2}$$
$$y_1 = \frac{F + F_{\text{тр1}}}{k_1} + y_2 = \frac{F + F_{\text{тр1}}}{k_1} + \frac{F + F_{\text{тр1}} + F_{\text{тр2}}}{k_2}$$

25

С учётом того, что силы трения при положительном значении внешней силы F будут меньше нуля, уравнение смещения y_1 узла 1 полностью совпадает с уравнением 22! Следовательно, использование МКЭ будет давать корректные результаты.

Опишем последовательность расчёта системы из двух модулей УФС (рисунок 12) с использованием МКЭ:

- 1) Модули УФС заменяются их эквивалентами для МКЭ.
- 2) Определяется величина $F_{\text{тр1}}$.
- 3) Определяется величина $F_{\text{тр2}}$.
- 4) Формируется вектор узловых сил.
- 5) Формируются МЖЭ.
- 6) Формируется МЖК.
- 7) Формируется вектор узловых смещений.
- 8) Решается матричное уравнение.

В УФС существуют модули, содержащие в различных комбинациях следующие ЭУ и ЭТ:

- 1) зависимый ЭУ,
- 2) независимый ЭУ,
- 3) зависимый ЭТ,
- 4) независимый ЭТ,
- 5) «комбинированный» ЭТ.

Независимый ЭУ означает жёсткость, величина которой постоянна и не зависит от величины внешней силы. Если ЭУ зависимый, то имеет место зависимость величины жёсткости элемента от внешней силы. В этом случае при формировании МЖЭ необходимо предварительно вычислить значение жёсткости элемента. При независимом ЭТ максимальная величина T силы трения не зависит от величины внешней силы и используется при расчёте текущего значения непосредственно. При зависимом ЭТ величина T зависит от значения внешней силы F и предварительно рассчитывается каждый раз перед использованием в расчётах. «Комбинированный» ЭТ представляет собой сумму зависимого и независимого ЭТ. Другими словами, величина силы трения имеет постоянную и переменную составляющие. В этом случае величина силы трения также рассчитывается перед использованием в дальнейших расчётах.

При расчёте силовых смещений цепочки последовательно соединённых произвольных модулей УФС следует пользоваться следующей методикой:

- 1) Модули УФС заменяются их эквивалентами для МКЭ.
- 2) Определяются значения жёсткостей для зависимых ЭУ.
- 3) Определяются значения максимальных значений сил трения для зависимых ЭТ.
- 4) Определяются величина сил трения $F_{\text{тр}i}$.
- 5) Формируется вектор узловых сил.
- 6) Формируются МЖЭ.
- 7) Формируется МЖК.

- 8) Формируется вектор узловых смещений.
- 9) Решается матричное уравнение.

Рассмотрим схему на рис. 17. От схемы на рис. 9 её отличает наличие зазора. В работе [1] для расчёта силовых смещений в этой схеме используется модуль с независимыми ЭУ и ЭТ и с зазором. Попробуем получить то же самое, используя МКЭ.

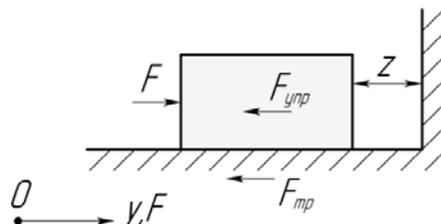


Рис. 17. Схема для расчёта силовых смещений. В системе появляется зазор

Первая трудность моделирования зазора связана с тем, что зазор представляет собой пустоту, и физического объекта для моделирования фактически нет. Выходом из данной ситуации является использование физического объекта-заместителя, который обладает свойствами исходного объекта или явления (в данном случае зазора).

Наиболее подходящим объектом-заместителем в данном случае является использование пружины переменной жёсткости. Однако необходимо учитывать, что после разгрузки системы смещение тела равно сумме остаточного смещения и величины ненулевого зазора. Использование только пружины переменной жёсткости при нулевом нагружении даст нулевую величину зазора независимо от величины жёсткости. Использование помимо пружины-заместителя зазора дополнительной силы позволяет правильно моделировать поведение зазора при последовательном соединении элементов и ведёт к неверным результатам расчётов при параллельной схеме связи.

Удачным решением для моделирования поведения пружины-заместителя зазора при разгрузке системы оказалось введение в общую структуру уравнения для МКЭ столбца коррекции U :

$$K \cdot (Y + U) = F \quad 26$$

От уравнения 16 данное уравнение отличается тем, что присутствует столбец коррекции U — этот столбец содержит корректирующие величины смещений, которые добавляются к величине смещения пружины. Это позволяет, используя пружины, моделировать объекты, имеющие остаточные смещения при разгрузке. Этот подход позволяет моделировать не только зазор, но и смещения в стыке при нормальном нагружении, которые никогда не снимаются после снятия нагрузки.

Жёсткость пружины-заместителя зазора k_z определяется по следующей зависимости:

$$k_z = \begin{cases} 0, & F \leq 0 \\ F/z, & F > 0 \end{cases} \quad 27$$

где F — сила, действующая на пружину-заместитель зазора, Н,
 k_z — жёсткость пружины-заместителя зазора, Н/мкм,
 z — величина одностороннего зазора, мкм.

Величина смещения пружины определяется по следующей зависимости:

$$y = F/z + u \quad 28$$

где u — корректирующее смещение, мкм:

$$u = \begin{cases} 0, & F \neq 0 \\ y_{-1}, & F = 0 \end{cases} \quad 29$$

где y_{-1} — текущая величина смещения (берётся с предыдущего шага расчёта). В итоге величина смещения пружины-заменителя имеет вид:

$$y = \begin{cases} 0, & F < 0 \\ z, & F > 0 \\ u, & F = 0 \end{cases} \quad 30$$

Для моделирования зазора с использованием МКЭ было придумано специальное обозначение, представленное на рис. 18.



Рис. 18. Обозначение элемента с нелинейными смещениями и остаточными смещениями после разгрузки

Следует отметить, что уравнения 28 - 30 составлены исходя из предположения, что, как только тело начинает проскальзывать, оно начинает двигаться свободно и смещается на величину зазора. Указанные уравнения не работают в случае, когда конец тела закреплён жёстко и при наличии проскальзывания в стыке идёт только процесс деформирования тела.

Для проверки правильности моделирования зазора найдём силовые смещения для всей системы, представленной на рис. 17 и сравним полученный результат с тем, что даёт модуль с независимыми ЭТ и ЭУ и зазором.

Заменяем модуль УФС схемой на рис. 11, а зазор — схемой на рис. 18. В итоге получим схему, показанную на рис. 19. Пронумеруем узлы по порядку слева направо. МЖЭ для пружин имеет вид, представленный на рис. 19 - 21.

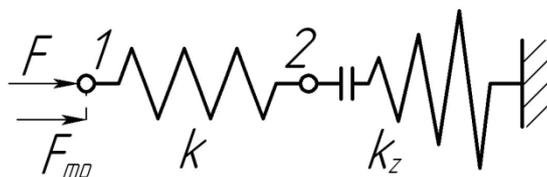


Рис. 19. Схема для расчёта смещений в системе на рис. 17 с использованием МКЭ

	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1

Рис. 20. МЖЭ для левой пружины

	2	0
2	k_z	$-k_z$
0	$-k_z$	k_z

Рис. 21 МЖЭ для правой пружины

МЖК для рассматриваемой системы имеет вид, представленный на рис. 22.

	1	2
1	k_1	$-k_1$
2	$-k_1$	k_1+k_z

Рис. 22 Матрица жёсткости элемента 1 (рис. 3)

Вектор узловых смещений имеет вид $[y_1; y_2]^T$, где y_1 — смещение левого края тела на рис. 17, а y_2 — смещение правого тела (тот же рис.). Вектор узловых реакций имеет вид $[F-F_{\text{тр}}; R_z]^T$. В итоге имеем следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+F_{\text{тр}1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 31$$

Данное уравнение отличается от уравнения 22 тем, что вместо $F_{\text{тр}2}$ стоит 0. Решение такого уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_2 = \frac{F+F_{\text{тр}1}}{k_z} \quad 32$$

$$y_1 = \frac{F+F_{\text{тр}1}+R_z}{k_1} + y_2 = \frac{F+F_{\text{тр}1}}{k_1} + \frac{F+F_{\text{тр}1}}{k_z} + u_1$$

где u_1 — корректирующее смещение узла 1.

Проанализируем, как изменяются смещения, описываемые уравнением 32 (см. табл. 1):

Табл. 1. Анализ изменения силовых смещений, рассчитываемых по формуле 32.

	F	$F_{\text{тр}}$	$F+F_{\text{тр}}$	k_z	y_2	y_1
↑	[0; T)	-F	0	$1/0 = \infty$	0 ($u=0$)	0
↑	[T; 3T]	-T	$F-T > 0$	$(F-T)/z$	z	$(F-T)/k+z$
↓	[3T; T]	$F-yk$	$yk > 0$	yk/z	z	$y+z$
↓	(T; 0)	T	$F+T > 0$	$(F+T)/z$	z	$(F+T)/k+z$
↓	0	T	$T > 0$	T/z	z	$T/k+z$
↓	(0; -T]	T	$T-F > 0$	$(T-F)/z$	z	$(T-F)/k+z$
↓	-T	T	0	$0/0 = 0$	z ($u=z$)	z
↓	<-T	T	$T-F < 0$	0	$-\infty$	$-\infty$

Последняя строка табл. 1 означает, что началось проскальзывание, и ничто уже не мешает свободному движению тела. При этом система не сопротивляется внешнему воздействию. Анализ смещений табл. показывает, что система-аналог для расчёта МКЭ

даёт такие же силовые смещения, что и модуль УФС с независимыми ЭУ и ЭТ и зазором. Следовательно, моделирование зазора для использования МКЭ проведено правильно.

В работе [1] есть модуль УФС, который отвечает за наличие пластических деформаций в системе. Данные деформации наблюдаются при нагружении стыка нормальной силой. Особенностью смещений является то, что они:

- 1) нелинейны,
- 2) никогда не возвращаются в ноль,
- 3) при каждой последующей разгрузке остаточные смещения увеличиваются.

Зависимость величины смещения в стыке при нескольких последовательных его нагружениях представлена на рис. 23.

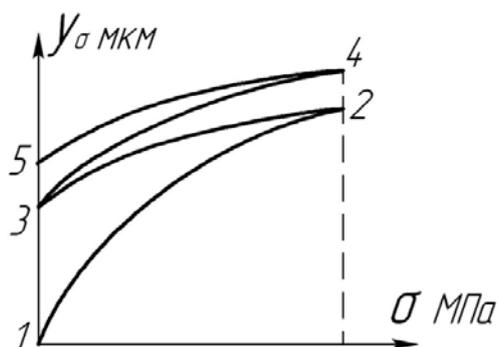


Рис. 23. Изменение смещений u_σ в нормально-деформируемом стыке в зависимости от напряжения σ . Цифры 1-5 — последовательность нагружения

Данные смещения моделируются точно так же как и односторонний зазор. При этом используется тот же самый элемент (см. рис. 18). Остаётся только собрать сведения, которые бы позволили задавать значения корректирующих смещений для пружины, имитирующей пластические деформации, для чего потребуются провести дополнительные исследования.

Благодаря наработкам, представленным в данном разделе, можно решать с использованием МКЭ цепочки произвольной длины последовательно соединённых модулей УФС и очень ограниченное количество систем с параллельными связями модулей. При этом имеется возможность использовать практически все модули УФС. Для того, чтобы рассчитывать произвольные одномерные УФС, остаётся научиться определять силовые смещения УФС при наличии последовательного соединения элементов и соединения элементов, которое не является ни последовательным ни параллельным. После решения вышеперечисленных задач можно будет перейти к двумерным и трёхмерным УФС.

Понятие типовых элементов конструкции введено в работе [1]. Согласно этой работе, в любой конструкции можно выделить деформируемые детали и деформируемые стыки. В свою очередь деформируемые стыки делятся на тангенциально деформируемые и нормально деформируемые стыки. Отдельно необходимо выделить элемент зазора, назначенного конструктором.

Выделение типовых элементов конструкции представляет собой промежуточный этап перехода от конструкции к УФС. Каждому типовому элементу конструкции соответствует своя типовая система модулей УФС. Таким образом можно от типовых элементов конструкции переходить непосредственно к УФС.

Деформируемая деталь несёт в себе только упругие свойства конструкции, причём жёсткость детали — величина постоянная. Деформируемые детали моделируются одной или системой нескольких пружин постоянной жёсткости. Задача нахождения смещения системы пружин описана в разделе 2.3.2.

Тангенциальный стык имеет место при нагружении реального стыка силой, лежащей в плоскости, параллельной плоскости стыка. При этом в стыке возникает сила трения. Выше была решена задача о моделировании трения с использованием МКЭ (раздел 2.3.1), однако там упругие смещения тела не отделялись от смещений в стыке. Задача раздельного моделирования трения в стыке решена и описана в данном разделе.

Нормально деформируемый стык имеет место при нагружении реального стыка нормальной силой. При этом смещения в стыке не только нелинейны, но и сопровождаются пластическими деформациями. При моделировании такого стыка используется модуль УФС, отвечающий за наличие пластических деформаций в УФС. Моделирование нормально нагруженного стыка описано ниже.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 24. Основание и тело считаем недеформируемыми. Слева от тела есть зазор z_1 , справа от тела — зазор z_2 . При нагружении тела силой F появляется сила трения $F_{тр}$. Пока $F < T$ — максимальной величины силы трения, $F_{тр} = -F$, и тело стоит неподвижно. Как только $F \geq T$, тело начинает скольжение и смещается на величину зазора до края недеформируемого основания. При уменьшении внешней силы $F < T$ и $F_{тр} = -F$. После того, как F , достигнув нуля, меняет своё направление и идёт процесс обратного нагружения сначала сила трения $F_{тр} = -F$ (при $|F| < T$), потом $|F_{тр}| = T$, и проскальзывание происходит на величину суммы двух начальных зазоров z_1 и z_2 .

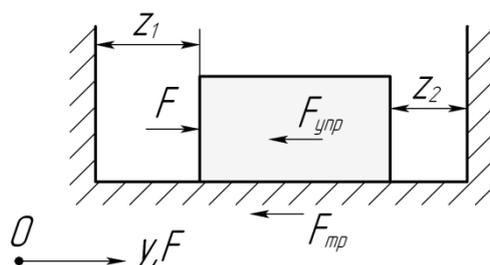


Рис. 24. Схема для моделирования тангенциально нагруженного стыка

Анализируя данную схему работы трения, можно выделить три элемента УФС: два зазора и элемент трения. Задача о моделировании трения с использованием МКЭ решена выше. Схема, описывающая работу трения для расчёта МКЭ, представлена на рис. 25.

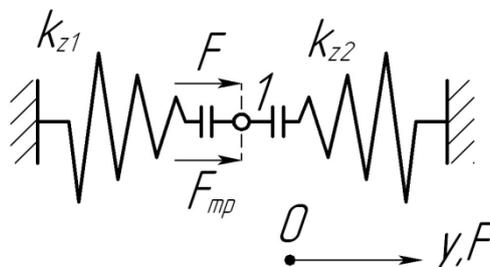


Рис. 25. Аналог схемы на рис. 24 для расчёта смещений с использованием МКЭ

Эта схема математически описывается следующим образом:

$$[k_{z1} + k_{z2}][y_1] = [F + F_{тр}] \quad 33$$

Рассмотрим частные случаи (см. табл., стрелка вверх указывает на увеличение силы F , стрелка вниз указывает на уменьшение силы F):

Анализ табл. показывает, что моделирование трения сделано успешно, что позволяет принять схему на рис. 25 как математический аналог тангенциально деформируемого стыка без учёта предварительного смещения.

Табл.2. Анализ силовых смещений в тангенциально деформируемом стыке (без учёта предварительного смещения).

№	F	$F_{тр}$	$F + F_{тр}$	k_{z1}	k_{z2}	y
1	↑ [0; T)	-F	0	$1/0 = \infty$	$1/0 = \infty$	0
2	↑ [T; 3T]	-T	$(F - T) > 0$	0	$(F - T)/z_2$	z_2
3	↓ [3T; T]	-T	$(F - T) > 0$	0	$z_2 k_{z2}$	z_2
4	↓ (0; T)	-F	0	$y_1 k_{z1}$	$y_1 k_{z2}$	z_2
5	↓ 0	0	0	$y_1 k_{z1}$	$y_1 k_{z2}$	z_2
6	↓ (0; -T)	F	0	$y_1 k_{z1}$	$y_1 k_{z2}$	z_2
7	↓ [-T; -T-2]	T	$(T - F) < 0$	$z_1 k_{z1}$	0	z_1
8	↑ (0; T)	F	0	$y_1 k_{z1}$	0	z_1
9	↑ 0	0	0	$y_1 k_{z1}$	$y_1 k_{z2}$	z_1
10	↑ (0; T)	-F	0	$y_1 k_{z1}$	$y_1 k_{z2}$	z_1

Предварительное смещение заключается в том, что даже при наличии трения тело начинает двигаться сразу же как только к нему приложена сдвигающая сила. Сначала имеет место чисто упругая реакция стыка (участок 1 на рис. 26). При разгрузке движение будет по тому же участку 1, при полной разгрузке тело вернётся в исходное положение. Максимальное смещение на первом участке никогда не превышает 0,5 мкм. Потом идёт второй участок, наклон которого больше. На втором участке уже имеет место трение (подробнее об этом написано в работе [1]). Переход от первого участка ко второму наблюдается примерно при $(0,7...0,8)T$, где T — максимальная величина силы трения. Вторым участком наблюдается на диапазоне внешней силы $(0,8...1)T$, после чего начинается третий участок — скольжение одного тела по поверхности другого.

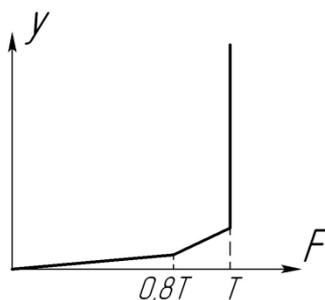


Рис. 26. Зависимость смещения в стыке от величины движущей силы F при учёте предварительного смещения

Моделирование учёта скольжения одного тела по поверхности другого уже проведено при решении задачи учёта трения без учёта предварительного смещения. Следовательно, остаётся смоделировать два участка. В работе [1] данное моделирование уже было сделано. Согласно работе [1], модель предварительного смещения выглядит как представлено на рис. 27. Однако данная модель требует некоторой коррекции. Дело в том, что при сложении смещений от первой и второй пружины по модели из работы [1] жёсткость второго участка должна быть не k_2 , а $(k_1+k_2)/(k_1k_2)$. Для того, чтобы исправить этот недочёт, вместо k_2 поставим $k_{2пр}$ (приведённое значение жёсткости, такое, чтобы при сложении смещений от двух пружин жёсткость второго участка получилась равной k_2).



Рис. 27. Реакции в системе (первый узел)

Для того, чтобы учитывать проскальзывание, к модели из работы [1] добавим модель трения, созданную в предыдущей задаче. В итоге получится полная модель трения, которая представлена на рисунке 28.

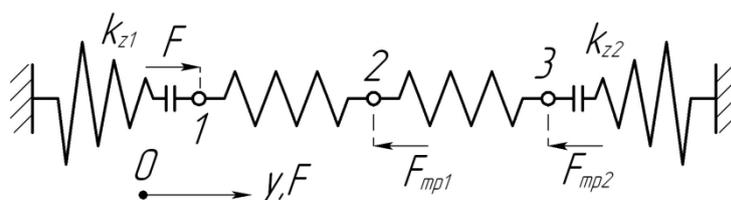


Рис. 28. Реакции в системе (первый узел)

Составим для данной системы разрешающее уравнение, используя МКЭ. Для этого пронумеруем узлы слева направо по порядку. Потом составим МЖЭ:

	0	1
0	k_{z1}	$-k_{z1}$
1	$-k_{z1}$	k_{z1}

Рис. 29. Матрица жёсткости элемента 1 (рис. 28)

	1	2
1	$k_{1\tau}$	$-k_{1\tau}$
2	$-k_{1\tau}$	$k_{1\tau}$

Рис. 30. Матрица жёсткости элемента 2 (рис. 28)

	2	3
2	$k_{2\tau\tau}$	$-k_{2\tau\tau}$
3	$-k_{2\tau\tau}$	$k_{2\tau\tau}$

Рис. 31. Матрица жёсткости элемента 3 (рис. 28)

	3	0
3	k_{z2}	$-k_{z2}$
0	$-k_{z2}$	k_{z2}

Рис. 32. Матрица жёсткости элемента 4 (рис. 28)

МЖК будет иметь вид, представленный на рисунке 33:

	1	2	3
1	$k_{z1}+k_{1\tau}$	$-k_{1\tau}$	0
2	$-k_{1\tau}$	$k_{1\tau}+k_{2\tau\tau}$	$-k_{2\tau\tau}$
3	0	$-k_{2\tau\tau}$	$k_{2\tau\tau}+k_{z2}$

Рис. 33 Матрица жёсткости конструкции

Вектор узловых смещений равен $[y_1, y_2, y_3]^T$, вектор узловых сил равен $[F, F_{\tau 1}, F_{\tau 2}]^T$, вектор коррекции U равен $[u_1, 0, u_2]$ В итоге решающее уравнение будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} k_{z1} + k_{1\tau} - k_1 & 0 & 0 \\ -k_{1\tau} & k_{1\tau} + k_{2\tau\tau} - k_{2\tau\tau} & 0 \\ 0 & -k_{2\tau\tau} & k_{2\tau\tau} + k_{z2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F_{\tau 1} \\ F_{\tau 2} \end{pmatrix} \quad 34$$

В настоящий момент автором проверены более простые аналоги рассматриваемой схемы, результаты моделирования которых можно распространить на рассматриваемую модель и в определённой степени утверждать о правильности моделирования (в схемах аналогах укорочена цепь пружин, образующих последовательную схему связи). Тем не менее, для окончательной уверенности в правильности моделирования автор планирует провести более детальный анализ смещений в системе, описываемой уравнением 34.

Нормально деформируемые стыки моделируются с использованием одного единственного модуля УФС, который отвечает за пластические деформации в УФС. Моделирование работы данного модуля для расчёта силовых смещений с использованием МКЭ описано в разделе.

В настоящий момент составлены модели как нормально, так и тангенциально деформируемого стыка, а также деформируемых деталей. Для полноценного расчёта силовых смещений и анализа доли влияния различных факторов на смещение конечного звена остаётся научиться рассчитывать силовые смещения в стыке, одновременно нагруженном нормальной и тангенциальной силой. Последним этапом в создании алгоритма автоматического расчёта и анализа силовой точности станков на

стадии их проектирования является задача разработки программного алгоритма перехода от конструкции к системе, составленной из типовых элементов конструкции. После решения указанной задачи можно будет написать первую программу, которая может самостоятельно выделять факторы в станке, анализировать их влияние на точность обработки, считать силовую составляющую точности станка, а также находить слабое с точки зрения жёсткости звено.

Литература

1. *Чернянский П.М.* Основы проектирования точных станков. Теория и расчёт. - М.: КНОРУС, 2010. - 240 стр.
2. *Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г.* Прочность, жёсткость и устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум: Решения задач механики методом конечных элементов / под ред. Б.Г. Попова. - М. : ИКЦ "Академкнига", 2008. - 160 с.
3. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике. М.: Наука, 1977.